

Los números amigables: un recuento de amistad perfecta en el mundo de los números

Leonardo Di Girolamo Sigalotti Díaz

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco
ldgsd@azc.uam.mx

Franklin W. Peña-Polo

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco
fwpp@azc.uam.mx

Fidel Cruz

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco
fcruz@azc.uam.mx

Resumen

No es de extrañar que pensemos con frecuencia en los números como herramientas abstractas y solitarias que sirven sólo para contar, calcular y medir; sin embargo, por detrás de tal apariencia existen algunos números especiales que guardan una conexión recíproca y profunda entre ellos, los llamados *números amigables*. Dichos números aparecen en pares y, como buenos amigos, cada uno es la suma de los divisores propios del otro. Detrás de esta definición existe, posiblemente, una de las historias más antiguas de la aritmética que ha fascinado por milenios a muchos estudiosos.

Palabras clave

Números divisores, teoría de números, números amigables.

Abstract

It is no wonder we often think of numbers as abstract, solitary tools used only for counting, computing and measuring; however, behind this appearance, there are some special numbers that share a deep, reciprocal connection with each other: the so-called *amicable numbers*. These numbers appear in pairs, and like good friends, each is the sum of the other's proper divisors. Behind this definition we discover, possibly, one of the oldest stories in arithmetic, one that has fascinated many scholars for millennia.

Keywords

Prime divisors, number theory, friendly numbers.

APA: Sigalotti, L., Peña, F. y Cruz, F. (2026). Los números amigables: un recuento de amistad perfecta en el mundo de los números. *Azcatl* (8), 14-17. DOI: [10.24275/AZC2026B003](https://doi.org/10.24275/AZC2026B003)

Fecha de recepción: 20 de octubre de 2025. Fecha de aceptación para publicación: 23 de enero de 2026.

Introducción

En el mundo de las matemáticas se pueden encontrar innumerables relaciones sorprendentes, bien sea por la elegancia o por la simplicidad de éstas. Es más decir que a veces estas relaciones son tan elegantes que pareciera que tienen alma propia. El hecho que los números se relacionen entre sí de diversas formas misteriosas cautivó a muchos estudiosos de la antigüedad. En este conjunto de números se encuentran los llamados números amigables (Hardy y Wright, 2008).

Cuando un par de números naturales, donde por números naturales se entiende el conjunto de números enteros positivos (es decir, 1, 2, 3, 4, ...), se relaciona de manera que la suma de los divisores propios de cada número es exactamente igual al otro, decimos entonces que esos dos números conforman un par de números amigables (Erdős, 1955). El primer par de números amigables fue descubierto en el siglo VI d. C. por los discípulos de Pitágoras, quienes le atribuyeron un simbolismo comparable con la amistad, la cooperación y la reciprocidad que pueden surgir entre personas (Burton, 2005). Dicho par, además de ser el más pequeño es el más famoso y corresponde a la dupla (220, 284). Como se muestra en la Figura 1, los números enteros que dividen exactamente al 220 corresponden a la secuencia 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110. La suma de estos números da exactamente 284, mientras los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, cuya suma da exactamente 220. Esta pareja de números, que fue por más de un milenio el único par co-

nocido de números amigables, representó también un ejemplo de reciprocidad absoluta y de belleza matemática (Burton, 2005).

En general, podemos decir que los números amigables tienen un valor principalmente teórico y pedagógico. Hasta ahora no han mostrado gran utilidad práctica en ciencia e ingeniería; no obstante, además de ser una curiosidad matemática, poseen aplicaciones en el estudio de funciones divisorias con implicaciones en la teoría de números analítica y algebraica. Asimismo, estos números han jugado un papel importante en el diseño y optimización de algoritmos. Si bien los números amigables en sí mismos no tienen un uso criptográfico directo, los algoritmos y los conocimientos desarrollados en torno a ellos sirven de fundamento para las cadenas de herramientas criptoanalíticas y de teoría computacional de números. Además, pueden ser de utilidad en el descubrimiento de patrones y analogías en la ciencia de datos. Aunque su aplicación de mayor impacto ha sido en el campo de las matemáticas educativas, recreativas y de divulgación.

Es innegable que los números amigables despiertan un cierto tipo de placer intelectual al asociar la reciprocidad absoluta con la amistad ideal, donde en cada pareja uno le da al otro exactamente lo que recibe. Por ejemplo, en la escuela pitagórica se pensaba que dos números cualesquiera que se complementen mutuamente constituían una expresión inequívoca de amistad matemática. Dicha interpretación refleja cómo en la antigüedad la aritmética se encontraba permeada de misticismo y filosofía.

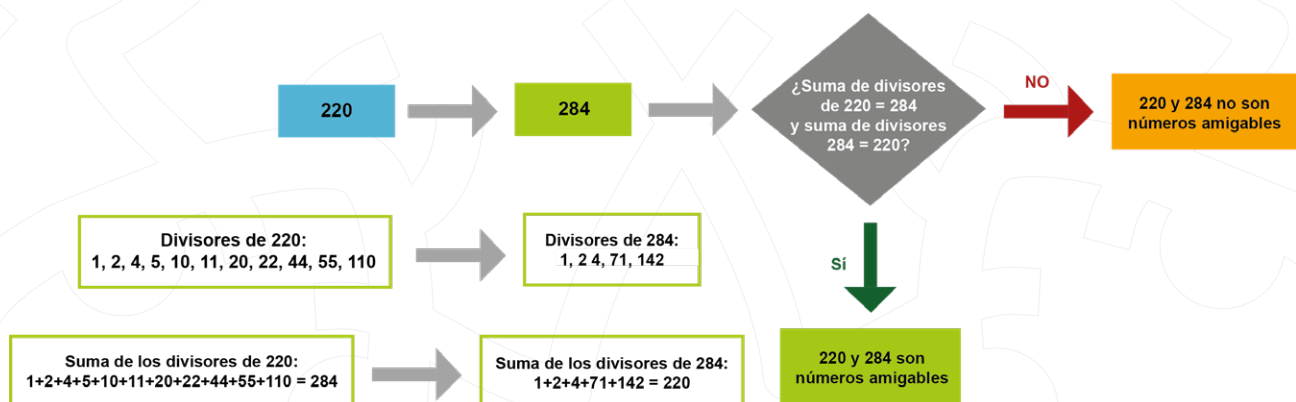


Figura 1. Esquema del modelo de diseño arquitectónico (MDA)

La búsqueda histórica de pares amigables

En el siglo ix, el matemático árabe Thābit ibn Qurra (826–901) introdujo un método para la derivación de pares amigables, que consistía en suponer que si existen números primos (es decir, números enteros divisibles sólo por sí mismos) de la forma $p=(3)2^{n-1}-1$, $q=(3)2^n-1$ y $r=(9)2^{n-1}-1$, donde n es un número entero positivo mayor que uno, entonces $2^n pq$ y $2^n r$ representan una pareja de números amigables (Rashed, 1996). Si bien esta formulación reprodujo el par (220, 284) para $n=2$ y dio los pares (17 296, 18 416) para $n=4$ y (9 363 584, 9 437 056) para $n=7$, no sirvió para reproducir otros pares. A pesar de que el método de Thābit ibn Qurra produjo sólo dos nuevos pares, representó un avance conceptual importante, demostrando que esa reciprocidad numérica no era solamente el resultado de un evento meramente casual, sino que, por el contrario, poseía una estructura matemática.

Luego de un largo letargo, los números amigables revivieron en el año 1636, cuando el erudito francés Pierre de Fermat redescubrió la formulación de Thābit ibn Qurra, dando a conocer la pareja (17 296, 18 416). Dos años más tarde, en 1638, René Descartes volvió a encontrar la pareja (9 363 584, 9 437 056), lo que dio inicio a una nueva era para la amistad aritmética. Una verdadera revolución en el mundo de los números amigables comenzó en el siglo xviii con el trabajo del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), posiblemente el más grande matemático de su siglo. Euler generalizó el teorema de Thābit ibn Qurra, encontrando que si

$$\begin{aligned} p &= (2^m - 1)(2^{n-m} + 1), \\ q &= (2^n - 1)(2^{n-m} + 1), \\ r &= (2^{m+n} - 1)(2^{n-m} + 1)^2, \end{aligned}$$

donde de nuevo p , q y r son números primos y $n > m > 0$ son números enteros, entonces $2^n pq$ y $2^n r$ corresponden a una pareja de números amigables. Usando esta nueva formulación, Euler encontró 58 pares amigables, aumentando el número a 61 pares conocidos para su época (O'Connor y Robertson, 1998; Sandifer, 2007; Anzaldo *et al.*, 2007). Evidentemente, el descubrimien-

to de Euler de nuevas parejas marcó un hito en el estudio de los números amigables al demostrar que entre los números pueden existir vínculos más profundos de lo que en realidad podemos imaginar, como en efecto Euler escribió en varias de sus cartas (Burton, 2005). Es importante notar que la segunda pareja más pequeña de números amigables, es decir, la dupla (1184, 1210), fue descubierta en 1867 por el joven colegial italiano B. Niccolò I. Paganini cuando tenía sólo 16 años; esta pareja de números había pasado desapercibida por Euler y otros matemáticos de su época (Sprugnoli, 2005).

Tabla 1. Los primeros diez pares de números amigables (m , n).

#	M	N
1	v	284
2	1184	1210
3	2 620	2 924
4	5 020	5 564
5	6 232	6 368
6	10 744	10 856
7	12 285	14 595
8	17 296	18 416
9	63 020	76 084
10	66 928	66 992

Nota. Amicable numbers, s. f.

La búsqueda de pares en tiempos modernos

En tiempos más recientes, con el desarrollo de la *teoría de números* en el siglo xix y la aparición de las computadoras en el siglo xx, el estudio de los números amigables se expandió notablemente, lo que dio como resultado el descubrimiento de miles de pares amigables. Hacia 1946 ya se conocían 390 pares amigables. La llegada de las computadoras, siempre más potentes y rápidas, transformó por completo la búsqueda de estos números. Desde entonces se han efectuado búsquedas para encontrar todos los pares por debajo de un cierto límite numérico. Hacia 1970 dicho límite se había impuesto en 10^8 , el cual

ha ido en aumento en las últimas cinco décadas hasta alcanzar el límite de 10^{18} en 2016. Por ejemplo, gracias al poder del cómputo existente hoy en día, se conocen bases de datos que contienen más de 12 millones de pares de números amigables conocidos y se sabe de la literatura que la búsqueda continúa con el uso de algoritmos siempre más poderosos y rápidos (Wells, 1997). Hasta el año 2023 se conocían del orden de 1.2 billones de pares de números amigables para un límite numérico de 10^{20} , donde los pares más grandes consistían de 50 000 dígitos. Si bien permanece abierto el problema de determinar si el número de pares amigables es infinito, muchos matemáticos han dejado entrever que es muy probable que ese sea el caso.

Relaciones invisibles y belleza aritmética

Es bien sabido que los números de las parejas amigables conocidas hasta el momento son ambos pares o ambos impares. Se desconoce si una pareja de números amigables pueda conformarse por un número par y otro impar. Además, se sabe que cada pareja conocida de números amigables comparte al menos un número primo como factor divisible común. Por otro lado, en 1968, el escritor y matemático aficionado estadounidense Paul Gardner encontró que una buena parte de las parejas amigables conocidas y conformadas por números pares poseían sumas de sus factores divisibles por nueve (Gardner, 1968) y un año después, en 1969, el matemático estadounidense Martin Lee dedujo una regla general para las excepciones (Lee, 1969).

En este punto, como reflexión conclusiva, cabe preguntarnos ¿por qué los números amigables siguen fascinando a muchos matemáticos y a los aficionados de las matemáticas alrededor del mundo? La respuesta muy posiblemente se encuentre en la reciprocidad y equilibrio que estos números inspiran. En nuestra época, donde el cálculo, la practicidad y la utilidad parecen dominar sobre el arte, los números amigables son una de las tantas evidencias que nos muestran que las matemáticas, además de inspirar armonía, están llenas de relaciones invisibles que al descubrirlas reflejan una belleza intrínseca.

Referencias

- Amicable numbers. (s. f.). En Wikipedia. Recuperado el 10 de diciembre de 2025 de https://en.wikipedia.org/wiki/Amicable_numbers
- Anzaldo, A., Delgado, J. y Monroy, F. (2007). *El legado matemático de Leonhard Euler a trescientos años de su nacimiento*. Innovación Editorial Lagares de México.
- Burton, D. M. (2005). *The history of mathematics*. McGraw Hill Higher Education.
- Erdős, P. (1955). On amicable numbers. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 4, 108-111. <https://doi.org/10.5486/PMD.1955.4.1-2.16>
- Gardner, M. (1968) Mathematical games. *Scientific American*, 218(3), 121-127. <https://www.jstor.org/stable/24926005>
- Hardy, G. H. y Wright, E. M. (2008). *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press.
- Lee, E. (1969) On divisibility by nine of the sums of even amicable pairs. *Mathematics of Computation*, 23(107), 545-548. <https://www.jstor.org/stable/2004382>
- O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (1998). *Leonhard Euler*. MacTutor History of Mathematics Archive. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/>
- Rashed, R. (1996). *The development of arabic mathematics: between arithmetic and algebra*. Springer.
- Sandifer, C. E. (2007). *How Euler did it*. The Mathematical Association of America.
- Sprugnoli, R. (2005). *Introduzione alla matematica: la matematica della scuola media*. Università degli Studi di Firenze.
- Wells, D. G. (1997). *The penguin dictionary of curious and interesting numbers*. Penguin Books.