AZCATL
Revista de divulgación en ciencias, ingeniería e innovación

Coleccionar estampas: una modelación matemática para explicar el porqué es difícil llenar un álbum de estampas

Marco Antonio Rodríguez Andrade
algorismo@gmail.com
Instituto Poltécnico Nacional

María Eugenia Vega Flores
eugenia.vega@unadmexico.mx
Universidad Nacional Abierta
y a Distancia de México

Resumen

En este artículo se aborda el problema del coleccionista, el cual consiste en coleccionar cierta cantidad de objetos, los cuales son comprados al azar en paquetes con una cantidad fija de tales objetos, todos distintos entre sí.

El objetivo es encontrar una función que estime la cantidad de objetos que se han coleccionado cuando se ha realizado una determinada cantidad de compras de tales paquetes; con esta función se puede plantear una ecuación para estimar la cantidad de compras que se deben realizar para lograr la colección completa.

Palabras clave

Modelación matemática, diferencias finitas, solución, estampas, álbum.

Abstract

This article addresses the collector's problem, which involves collecting a certain number of items purchased randomly. The case in question arises when one desires to collect a specific number of items that are purchased randomly in packages containing a fixed quantity of such items, all distinct from each other. The objective is to find a function that estimates the number of items collected after a certain number of purchases of such packages. With this function, one can formulate an equation to estimate the number of purchases needed to achieve a complete collection.

Keywords

Mathematical modeling, finite differences, solution, stamps, album.

Cita APA: Rodríguez, M. y Vega, M. (2024). Coleccionar estampas: una modelación matemática para explicar el porqué es difícil llenar un álbum de estampas. *Azcatl,* 2, 11-14. DOI: 10.24275/AZCATL2024A002

Introducción

La modelación matemática es una habilidad muy valorada en la formación de las carreras de ingeniería y ciencias exactas. La habilidad de modelar se desarrolla en diferentes disciplinas, principalmente en la física, la química, la biología, etcétera, donde generalmente las variables son continuas y una de las herramientas más usadas para modelar en estos contextos es el cálculo y las ecuaciones diferenciales.

En este artículo se presenta un problema en el cual la variable independiente es discreta.

Planteamiento del problema

Una afición común entre niños y adolescentes es coleccionar estampas de algún tema especial, estampas que son adquiridas en sobres cerrados, por lo que el coleccionista no sabe de antemano las estampas que va a obtener. En caso de que el coleccionista deba reunir estampas distintas, dos problemas se pueden plantear:

1. Si adquirió k sobres, ¿se puede estimar la cantidad de estampas distintas que ha coleccionado?
2. ¿Cuál es el número esperado de sobres que debe comprar un coleccionista para tener al menos un ejemplar de cada estampa?

El cuestionamiento 2 se puede considerar resuelto en el caso de que cada sobre sólo tenga una estampa y la solución del mismo se puede encontrar en Aigner y Ziegler (2010), en el capítulo 28, sin embargo, en este libro no aparece una respuesta para la pregunta 1.

1.1. Condiciones para la modelación

Para la modelación del problema 1 del coleccionista asumiremos las siguientes condiciones:

1. El número total de estampas por coleccionar es $M > 1$.
2. Las estampas se venden en sobres con $h < M$ estampas cada uno.
3. En un mismo sobre todas las estampas son distintas entre sí.
4. No hay estampas difíciles, es decir, todas las estampas tienen la misma probabilidad de salir.

Denotaremos con $f(k)$ a la cantidad estimada de estampas coleccionadas cuando se han realizado k compras, entonces

$$f(k+1) = f(k) + P(k),$$

donde $P(k) \geq 0$ es la cantidad estimada (esperada) de estampas *nuevas*, es decir, que son distintas a las que ya se tienen.

Al tener $f(k)$ ejemplares distintos ya coleccionados y al elegir una estampa al azar, se tiene que

$$\frac{M - f(k)}{M}$$

es la probabilidad de que la estampa sea distinta a los ejemplares ya coleccionados.

Como las estampas que vienen en un sobre corresponden a ejemplares distintos, podemos suponer que

$$P(k) = h\frac{M - f(k)}{M}.$$

De lo anterior se establece la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} &f(1) = h \\ &f(k+1) = f(k) + h\frac{M - f(k)}{M}. \end{aligned}$$

Algunas características cualitativas de esta función son las siguientes:

- es creciente;
- está acotada, siendo M una cota superior;
- $\lim_{k\to\infty} f(k) = M$.

1.2. Obtención de la función modelo

De acuerdo con la sección anterior podemos considerar la siguiente ecuación de diferencias:

$$\frac{df}{dk} \approx f(k+1) - f(k) = h\frac{M - f(k)}{M}.$$

Con la condición inicial $f(1) = h$.

La función

$$f(k) = M - (M-h)e^{-\frac{h}{M}(k-1)}$$

es la solución de la ecuación en diferencias que satisface la condición inicial establecida.

Con base en la expresión anterior, la cantidad esperada de sobres que se deben adquirir para reunir $M-1$ ejemplares distintos es

$$k = \frac{M\ln(M-h)}{h} + 1.$$

Cuando $h = 1$ se obtiene una cantidad esperada cercana a la que se encuentra en Aigner y Ziegler (2005).

1.3. Comparación de Modelos

En Rodríguez (2023), mediante un ajuste de curvas se obtiene la función $f(k) = M\left(1 - e^{\frac{h}{M}k}\right)$, para $h = 5$, la cual estima la cantidad de estampas coleccionadas; asimismo, en este artículo hemos obtenido otra función que modela el mismo problema.

En la tabla que se muestra a continuación se presenta la cantidad de sobres que se tienen que adquirir para coleccionar $M-1$ estampas y la cantidad de estampas acumuladas, esta cantidad incluye las estampas que han salido más de una vez.

Las siguientes tablas muestran la cantidad estimada de estampas acumuladas cuando se intenta coleccionar estampas de un total .

Función	Cantidad de sobres para adquirir $M-1$ estampas	Cantidad de estampas acumuladas
$f_1(k) = M\left(1 - e^{-\frac{h}{M}k}\right)$	$\frac{M}{h}\ln M$	$M\ln M$
$f_2(k) = M - (M-h)e^{-\frac{h}{M}(k-1)}$	$k = \frac{M\ln(M-h)}{h} + 1$	$M\ln(M-h) + h$

Cantidad de estampas acumuladas para $h = 1$										
M	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$f_1(k)$	460.52	1059.66	1711.13	2396.59	3107.30	3838.16	4585.76	5347.69	6122.16	6907.76
$f_2(k)$	460.51	1059.66	1711.13	2396.58	3107.30	3838.16	4585.76	5347.69	6122.15	6907.75

Cantidad de estampas acumuladas para $h = 5$										
M	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$f_1(k)$	460.52	1059.66	1711.13	2396.59	3107.30	3838.16	4585.76	5347.69	6122.16	6907.76
$f_2(k)$	460.39	1059.60	1711.09	2396.55	3107.28	3838.14	4585.74	5347.67	6122.14	6907.74

Cantidad de estampas acumuladas para $h = 10$										
M	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$f_1(k)$	460.52	1059.66	1711.13	2396.59	3107.30	3838.16	4585.76	5347.69	6122.16	6907.76
$f_2(k)$	459.98	1059.40	1710.96	2396.46	3107.20	3838.07	4585.68	5347.63	6122.10	6907.70

Cantidad de estampas acumuladas para $h = 20$										
M	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$f_1(k)$	460.52	1059.66	1711.13	2396.59	3107.30	3838.16	4585.76	5347.69	6122.16	6907.76
$f_2(k)$	458.20	1058.59	1710.44	2396.07	3106.89	3837.82	4585.46	5347.44	6121.93	6907.55

Como se observa en las tablas anteriores, el hecho de vender paquetes con estampas, todas distintas entre sí, para valores *pequeños* de , no es significativo para la cantidad acumulada ni para la cantidad de sobres y en la práctica es casi igual que adquirir una por una al azar.

Conclusiones

Entre los coleccionistas de estampas se tiene la idea, *a priori*, de que hay una o varias difíciles, es decir, que algunas de ellas las imprimen en menor cantidad para dificultar el llenado del álbum. Una de las conclusiones de este ensayo es que no se necesita tal recurso, el azar es suficiente para que se acumulen muchas estampas en el proceso, lo cual implica una fuerte inversión por parte del coleccionista.

Desde el punto de vista didáctico, la modelación del problema proporciona una experiencia en la cual el alumno puede percatarse de lo siguiente:

- para un mismo problema se pueden encontrar diferentes modelos que expliquen el fenómeno;
- los modelos deben dar resultados parecidos;
- el modelo obtenido dependerá mucho del conocimiento matemático de quien aborda el problema.

Bibliografía

Aigner, M. y Ziegler, G. (2005). *El libro de las demostraciones.* Nivola Libros Ediciones.

Aigner, M. y Ziegler, G. (2010). *Proofs of The Book*. Springer.

Rodríguez, M. A. (2023). Coleccionar estampas: un ajuste de curvas para obtener una función que explique por qué es difícil llenar un álbum de estampas. *Azcatl*, (1), 18-23.

Zill, D. G. (2009). *Ecuaciones diferenciales con modelado.* Cengage Learning.